Renaud Sirdey

Quelques méthodes « classiques » de déconvolution

Éditions des Nik's News
www.niksnews.com/editions/

1998

Introduction

Ce document présente un certain nombre de méthodes de base utilisées en traitement du signal et de l'image pour inverser une équation de convolution en présence de bruit :

$$g_i = \mathcal{B}\left(\sum_{i=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)$$

g représente le signal/image dégradé/e, h la réponse impulsionnelle du système et f l'objet original. Le terme $\mathcal{B}$ représente la perturbation du produit de convolution par un processus aléatoire.

Le document est organisé de la manière suivante : dans un premier temps, on présente deux méthodes directes (filtre inverse et filtre de Wiener) ; dans un second temps, un (bref) rappel de la théorie de Bayes (estimation par maximisation de la vraisemblance et par maximisation de la probabilité a posteriori) est présenté ; enfin, les méthodes directes sont interprétées dans le cadre de la théorie de Bayes et l'algorithme de Richardson-Lucy est introduit. Quelques résultats expérimentaux sont disponibles dans la dernière section pour l'algorithme Richardson-Lucy.

1 Première approche

1.1 Filtre inverse

1.1.1 Modèle

$$\begin{aligned} g_i &= (f \otimes h)_i + n_i \qquad (1) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} + n_i \end{aligned}$$

n est un terme de bruit additif.

1.1.2 Critère

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \|g - f \otimes h\|^2 \\ &= \sum_{i=0}^{N-1}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)^2 \end{aligned}$$

1.1.3 Expression

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial f_k} &= 2\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial f_k}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right) \\
&= -2\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right) \\
&= -2\left(\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k} g_i - \sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}\sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right) \\
&= -2((h \odot g)_k - (h \odot f \otimes h)_k) = 0
\end{aligned}$$

Soit, dans l'espace de Fourier (via le théorème de convolution)

$$H_\xi^* G_\xi - |H_\xi|^2 F_\xi = 0$$

D'où l'expression du filtre inverse

$$F_\xi = \frac{H_\xi^*}{|H_\xi|^2} G_\xi \tag{2}$$

En pratique ce filtre est inutilisable à cause de son mauvais conditionnement. Si h est un système passe bas (ce qui est souvent le cas) alors H_ξ est (trop) proche de zero à haute fréquence et le bruit est amplifié.

1.2 Filtre de Wiener

1.2.1 Modèle

$$\begin{aligned}
g_i &= (f \otimes h)_i + n_i \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} + n_i
\end{aligned}$$

1.2.2 Critère

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \|f - \hat{f}\|^2 \\
&= \|f - q \otimes g\|^2 \\
&= \sum_{i=0}^{N-1}\left(f_i - \sum_{j=0}^{N-1} q_j g_{i-j}\right)
\end{aligned}$$

où $\hat{f}$ est l'*estimateur* de f.

1.2.3 Expression

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon}{\partial q_k} &= 2\sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial q_k}\left(f_i - \sum_{j=0}^{N-1} q_j g_{i-j}\right)\left(f_i - \sum_{j=0}^{N-1} q_j g_{i-j}\right) \\
&= -2\sum_{i=0}^{N-1} g_{i-k}\left(f_i - \sum_{j=0}^{N-1} q_j g_{i-j}\right) \\
&= -2\left(\sum_{i=0}^{N-1} g_{i-k} f_i - \sum_{i=0}^{N-1} g_{i-k}\sum_{j=0}^{N-1} q_j g_{i-j}\right) \\
&= -2((g \odot h)_k - (g \odot g \otimes q)_k) = 0
\end{aligned}
$$

Soit dans l'espace de Fourier

$$G_\xi^* F_\xi - |G_\xi|^2 Q_\xi = 0$$

D'où l'expression du filtre

$$Q_\xi = \frac{G_\xi^* F_\xi}{|G_\xi|^2}$$

Or

$$
\begin{aligned}
G_\xi^* F_\xi &= (F_\xi H_\xi + N_\xi)^* F_\xi \\
&= H_\xi^* |F_\xi|^2 + N_\xi^* F_\xi
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
|G_\xi|^2 &= (F_\xi H_\xi + N_\xi)^*(F_\xi H_\xi + N_\xi) \\
&= |F_\xi|^2 |H_\xi|^2 + F_\xi^* H_\xi^* N_\xi + N_\xi^* F_\xi H_\xi + |N_\xi|^2
\end{aligned}
$$

Donc [1]

$$
\begin{aligned}
Q_\xi &= \frac{H_\xi^* |F_\xi|^2}{|F_\xi|^2 |H_\xi|^2 + |N_\xi|^2} \\
&= \frac{H_\xi^*}{|H_\xi|^2 + \frac{|N_\xi|^2}{|F_\xi|^2}}
\end{aligned}
$$

[1]. Si l'on fait l'hypothèse que le bruit n'est pas corrélé au signal ($N_\xi^* F_\xi = F_\xi^* N_\xi = 0$).

1.2.4 Utilisation

En pratique le terme $\frac{|N_\xi|^2}{|F_\xi|^2}$ est inconnue et est courament remplacé par une constante approximativement égale à l'inverse du carré du rapport signal à bruit. Si le bruit est effectivement non corrélé son spectre est effectivement constant. Réaliser l'axpproximation précédement prensentée revient donc à supposer qu'il en est de même pour le signal. Le filtre de Wiener devient alors

$$Q_\xi = \frac{H_\xi^*}{|H_\xi|^2 + \Lambda},\ \Lambda = \frac{1}{\mathrm{snr}^2}$$

Il s'agit cette fois d'un filtre « bien » conditionné pour des valeurs de Λ raisonnables, si $\Lambda = 0$ on retrouve le filtre inverse (équation (2)).

2 Estimation Bayesienne

2.1 Probabilités conditionnelles

La probabilité conditionnelle de « A sachant B » est définie par

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ et } B)}{P(B)}$$

de la même manière

$$P(B|A) = \frac{P(B \text{ et } A)}{P(A)}$$

Comme $P(A \text{ et } B) = P(B \text{ et } A)$ on a la relation suivante

$$P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) \tag{3}$$

2.2 Maximum a posteriori

Dans le cadre d'un signal dégradé par un produit de convolution l'équation (3) peut être réecrite sous la forme

$$P(f|g) = \frac{P(g|f)P(f)}{P(g)}$$

$P(f|g)$ et $P(f)$ sont respectivement appelé probabilité a posteriori et probabilité a priori de f.
En passant au logarithme

$$\log P(f|g) = \log P(g|f) + \log P(f) - \log P(g)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial f}\log P(f|g) = \frac{\partial}{\partial f}\log P(g|f) + \frac{\partial}{\partial f}\log P(f)$$

Le but est donc de trouver un estimateur de f qui maximise le terme de probabilité a posteriori et qui vérifie notamment

$$\frac{\partial}{\partial f}\log P(f|g) = 0$$

2.3 Maximum de vraisemblance

Lorsque $P(f)$ est suffisament « étalée » on réalise l'approximation suivante

$$\frac{\partial}{\partial f}\log P(f) \approx 0$$

et donc

$$\frac{\partial}{\partial f}\log P(f|g) \approx \frac{\partial}{\partial f}\log P(g|f)$$

Ceci est la méthode du maximum de vraisemblance.

3 Déconvolution « bayesienne »

3.1 Filtre inverse et maximum de vraisemblance

On reprend le modèle (1) page 3 sous l'hypothèse que le terme de bruit n_i est la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne centrée de variance égale à σ^2

$$n_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$$

On a donc[2]

$$P(g|f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)^2}$$

$$\log P(g|f) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial f_k}\log P(g|f) = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N-1}\frac{\partial}{\partial f_k}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)$$

[2] Gaussienne : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)\\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k} g_i - \sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}\sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)\\
&= \frac{1}{\sigma^2}((h \odot g)_k - (h \odot f \otimes h)_k) = 0
\end{aligned}$$

Soit dans l'espace de Fourier

$$H^*_\xi G_\xi - |H_\xi|^2 F_\xi = 0$$

et donc

$$F_\xi = \frac{H^*_\xi}{|H_\xi|^2} G_\xi$$

ce qui correspond bien à (2).

3.2 Filtre de Wiener et maximum a posteriori

On reprend le modèle de la section précédente avec en plus une connaissance a priori sur le signal f de la forme

$$f_i \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma_f^2)$$

On a donc

$$P(g|f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_i h_{i-j}\right)^2}$$

$$P(f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_f} e^{-\frac{f_i}{2\sigma_f^2}}$$

et

$$\log P(g|f) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\sigma_n^2 - \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{i=0}^{N-1}\left(g_i - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}\right)^2$$

$$\log P(f) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\sigma_f^2 - \frac{1}{2\sigma_f^2}\sum_{i=0}^{N-1} f_i^2$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial f_k}\log P(g|f) + \frac{\partial}{\partial f_k}\log P(f) = \frac{2}{\sigma_n^2}((h \odot g)_k - (h \odot f \otimes h)_k) - \frac{2}{\sigma_f^2} f_k = 0$$

Soit dans l'espace de Fourier

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_n^2}(H_\xi^* G_\xi - |H_\xi|^2 F_\xi) - \frac{1}{\sigma_f^2} &= 0 \\
\frac{1}{\sigma_n^2} H_\xi^* G_\xi - F_\xi \left(\frac{1}{\sigma_n^2}|H_\xi|^2 + \frac{1}{\sigma_f^2} \right) &= 0
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
F_\xi &= \frac{\frac{1}{\sigma_n^2} H_\xi^*}{\frac{1}{\sigma_n^2}|H_\xi|^2 + \frac{1}{\sigma_f^2}} G_\xi \\
&= \frac{H_\xi^*}{|H_\xi|^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_f^2}} G_\xi
\end{aligned}
$$

3.3 Richardson-Lucy

3.3.1 Modèle

$$
\begin{aligned}
g_i &= \mathcal{P}(\lambda_i = (f \otimes h)_i) \\
&= \mathcal{P}\left(\lambda_i = \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} \right)
\end{aligned}
$$

$\mathcal{P}$ désigne le tirage d'une variable aléatoire poissonienne, de densité de probabilité

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!},\ x \in N$$

Ce modèle est très utilisé en astronomie ou l'on modélise le phénomène de detection de photons par un flux de Poisson stationnaire. Ce modéle apporte une justification « physique » à l'introduction d'une statistique poissonienne dans l'équation précédente.

3.3.2 Expression

Estimation par maximisation de la vraisemblance

$$P(g|f) = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{\lambda_i^{g_i} e^{-\lambda_i}}{g_i!}$$

$$\begin{aligned}
\log P(g|f) &= \sum_{i=0}^{N-1} g_i \log \lambda_i - \lambda_i - \log g_i! \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} g_i \log \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} \right) - \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} - \log g_i!
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial f_k} \log P(g|f) &= \sum_{i=0}^{N-1} g_i \frac{\partial}{\partial f_k} \log \left(\sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} \right) - \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\partial}{\partial f_k} \sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \frac{g_i}{\sum_{j=0}^{N-1} f_j h_{i-j}} h_{i-k} - \sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k} \\
&= \left(h \odot \frac{g}{f \otimes h} \right)_k - \sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k} = 0
\end{aligned}$$

3.3.3 Algorithme

De l'équation précédente découle[3]

$$\begin{aligned}
\left(h \odot \frac{g}{f \otimes h} \right)_k &= \sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k} \\
f_k \left(h \odot \frac{g}{f \otimes h} \right)_k &= f_k \sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}
\end{aligned}$$

D'où

$$f_k = \frac{f_k}{\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}} \left(h \odot \frac{g}{f \otimes h} \right)_k$$

Cette dernière équation nécessite une évaluation itérative de l'estimateur[4]. D'où l'itération de l'algorithme

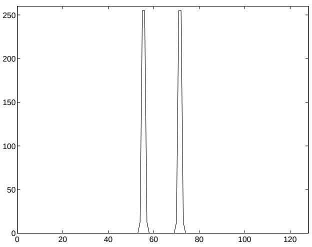
$$f_k^{(n+1)} = \frac{f_k^{(n)}}{\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k}} \left(h \odot \frac{g}{f^{(n)} \otimes h} \right)_k$$

4 Test d'algorithme : Richardson-Lucy

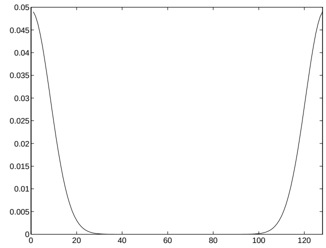
[3]. Notons par ailleurs que sous l'hypothèse de périodicité $\sum_{i=0}^{N-1} h_{i-k} = \sum_{i=0}^{N-1} h_i = N\bar{h}$.

[4]. Attention : l'introduction d'une évaluation itérative de l'estimateur n'est pas aussi évidente qu'il n'y parait. Il est en l'occurence possible de montrer que l'algorithme ainsi définie est une variante de l'algorithme EM et posséde la la propriété de converger vers l'estimateur du maximum de vraisemblance recherché.

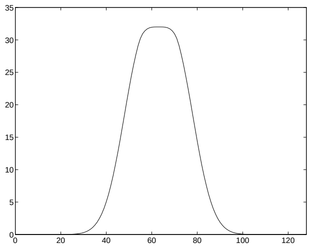
Fig. **1** – Processus de dégradation « poissonien ». (a) signal d'entrée, (b) réponse impulsionnelle, (c) signal dégradé (résultat de la convolution de (a) par (b)), (d) perturbation par un bruit poissonien dépendant du signal.



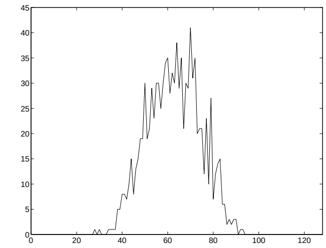
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. **2** – Restoration du signal de la figure précédente par l'algorithme de Richardson-Lucy (500 itérations). Les deux « pics » ont pus être séparés par l'algorithme.

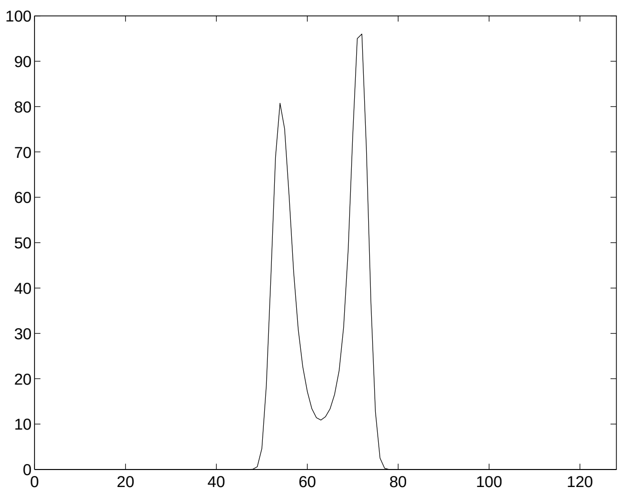
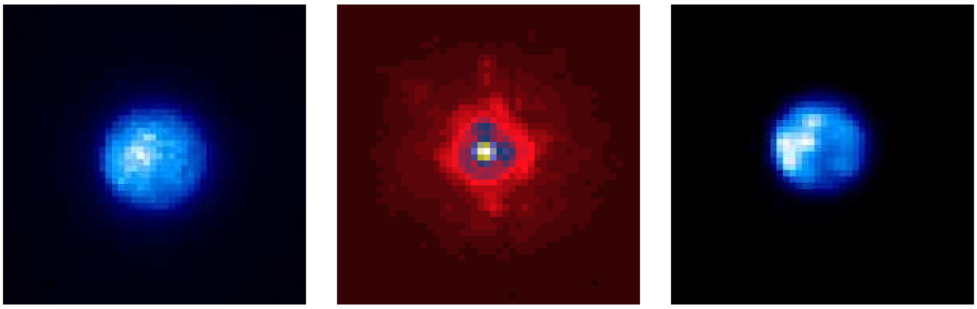


FIG. **3** – Restauration d'image dans le cadre du modèle poissonien à l'aide de l'algorithme de Richardson-Lucy (données : Titan observé avec le système d'optique adaptative ADONIS). (a) Image dégradée, (b) estimation de la réponse impulsionnelle, (c) estimation de l'objet.



(a) (b) (c)