Renaud Sirdey et Héléne Nillès

Synthèse de formes d'ondes

Éditions des Nik's News
www.niksnews.com/editions/

1998

Introduction

Ces dernières années les progrés réalisés dans les composants électroniques (diodes, transistors, thyristors) ont complètement transformé la commande des moteurs électriques. Actuellement, le système le plus utilisé est le convertisseur continu-alternatif, ou onduleur. Celui-ci utilise comme alimentation le secteur et comme récepteur le moteur à courant continu.

Afin d'éviter, entre autre, des problèmes de résonance mécanique, on est amené à créer à l'aide d'un onduleur à deux états une forme d'onde ne comportant pas certaines fréquences. L'objet de ce TP est donc l'élimination d'harmoniques non désirés dans un signal binaire par la méthode de Patel et Hoft (1973).

Table des matières

Chapitre 1

Etude de la forme d'onde

1.1 Définition de la forme d'onde

Etant donné un entier $M > 0$ soit une suite de réels

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{2M} < \alpha_{2M+1} = \pi \tag{1.1}$$

dénommés angles de commutation. Considérons la forme d'onde binaire de pulsation $\omega > 0$ suivante

$$f(\omega t) = \begin{cases} (-1)^k & \text{si } \alpha_k \leq \omega t < \alpha_{k+1} \\ -f(\omega t - \pi) & \text{si } \pi \leq \omega t < 2\pi \end{cases} \tag{1.2}$$

De plus, on prolonge f par périodicité

$$f(\omega t) = f(\omega t + 2k\pi)\ \forall k \in Z\ \forall \omega t \in [0, 2\pi[\tag{1.3}$$

1.2 Décomposition de la forme d'onde en série de Fourier

On décompose f en série de Fourier

$$f(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \tag{1.4}$$

avec a_n, b_n les coefficients de Fourier définis par

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \qquad (1.5) \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx$$

Montrer que, de par la première propriété de f, on a $a_{2p} = 0\ \forall p \geq 0$ et $b_{2p} = 0\ \forall p \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos 2pxdx \qquad (1.6)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos 2pxdx + \int_\pi^{2\pi} f(x)\cos 2pxdx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos 2pxdx - \int_\pi^{2\pi} f(x-\pi)\cos 2pxdx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\cos 2pxdx - \int_0^{\pi} f(x)\cos 2p(x+\pi)dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)(\underbrace{\cos 2px - \cos 2p(x+\pi)}_{=0})dx\\
&= 0
\end{aligned}$$

De la même façon, pour b_{2p}, on a

$$\begin{aligned}
b_{2p} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin 2pxdx \qquad (1.7)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\sin 2pxdx + \int_\pi^{2\pi} f(x)\sin 2pxdx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\sin 2pxdx - \int_\pi^{2\pi} f(x-\pi)\sin 2pxdx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} f(x)\sin 2pxdx - \int_0^{\pi} f(x)\sin 2p(x+\pi)dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)(\underbrace{\sin 2px - \sin 2p(x+\pi)}_{=0})dx\\
&= 0
\end{aligned}$$

Donner l'expression de a_{2p+1} et b_{2p+1} pour tout $p \in N$

$$a_{2p+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(2p+1)xdx \qquad (1.8)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(2p+1)x dx + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos(2p+1)x dx}_{-\int_0^{\pi} f(x)\cos(2p+1)(x+\pi)dx} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)(\cos(2p+1)x - \cos(2p+1)(x+\pi))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2M}(-1)^k\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}(\cos(2p+1)x - \cos(2p+1)(x+\pi))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2M}(-1)^k\left(\left[\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}\right]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} - \left[\frac{\sin(2p+1)x}{2p+1}\right]_{\alpha_k-\pi}^{\alpha_{k+1}-\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi(2p+1)}\sum_{k=0}^{2M}(-1)^k(\sin(2p+1)\alpha_{k+1} - \sin(2p+1)\alpha_k)
\end{aligned}
$$

Ce qui revient à

$$
\begin{aligned}
a_{2p+1} &= \frac{2}{\pi(2p+1)}\Big(-\sin(2p+1)\alpha_0 + \sin(2p+1)\alpha_{2M+1} \\
&\quad +2\sum_{k=1}^{2M}(-1)^{k+1}\sin(2p+1)\alpha_k\Big) \qquad (1.9) \\
&= \frac{4}{\pi(2p+1)}\sum_{k=1}^{2M}(-1)^{k+1}\sin(2p+1)\alpha_k
\end{aligned}
$$

car $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{2M+1} = \pi$.

On procède de la même manière pour b_{2p+1}

$$
\begin{aligned}
b_{2p+1} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2p+1)x dx \qquad (1.10) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(2p+1)x dx + \frac{1}{\pi}\underbrace{\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\sin(2p+1)x dx}_{-\int_0^{\pi} f(x)\sin(2p+1)(x+\pi)dx} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)(\sin(2p+1)x - \sin(2p+1)(x+\pi))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2M}(-1)^k\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}(\sin(2p+1)x - \sin(2p+1)(x+\pi))dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2M}(-1)^k\left(\left[-\frac{\cos(2p+1)x}{2p+1}\right]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} - \left[-\frac{\cos(2p+1)x}{2p+1}\right]_{\alpha_k-\pi}^{\alpha_{k+1}-\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi(2p+1)}\sum_{k=0}^{2M}(-1)^k(\cos(2p+1)\alpha_k - \cos(2p+1)\alpha_{k+1})
\end{aligned}
$$

Ce qui revient à

$$
\begin{aligned}
b_{2p+1} &= \frac{2}{\pi(2p+1)}\Big(\cos(2p+1)\alpha_0 - \cos(2p+1)\alpha_{2M+1} \\
&\quad +2\sum_{k=1}^{2M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k\Big) \\
&= \frac{4}{\pi(2p+1)}\left(1+\sum_{k=1}^{2M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k\right)
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Car $\alpha_0 = 0 \Rightarrow \cos(2p+1)\alpha_0 = 1$ et $\alpha_{2M+1} = \pi \Rightarrow \cos(2p+1)\alpha_{2M+1} = -1$.

La figure 1.1 représente la reconstruction d'une forme d'onde quelconque, vérifiant les propriétés (1.2) et (1.3), à partir de ses coefficients de Fourier (a_{2p+1} et b_{2p+1}).

1.3 Introduction d'une symétrie supplémentaire

A partir de maintenant, on se restreint à ne considérer que des formes d'ondes verifiant (1.2) et (1.3) ainsi que la propriété de symétrie suivante

$$
f(\omega t) = f(\pi - \omega t) \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq \omega t < \pi \tag{1.12}
$$

Montrer que

$$
a_n = 0 \ \forall n \in N
$$

Dans ce qui suit, on s'efforce de montrer que dans le cadre de la propriété (1.12) $f(\omega t)$ est une fonction impaire.

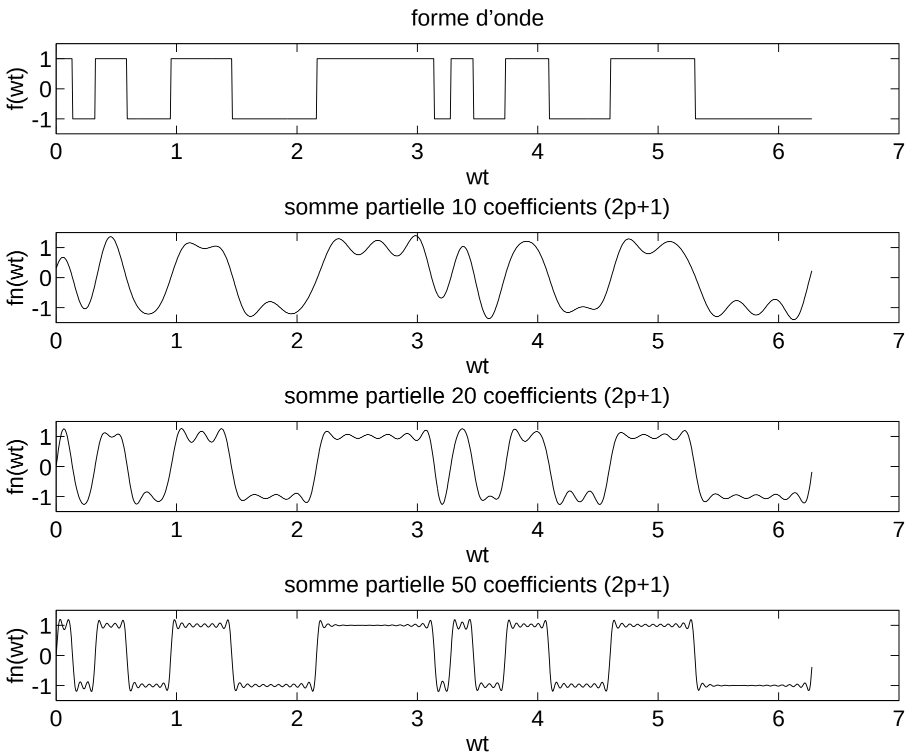
On a

$$
\begin{aligned}
f(-\omega t) &= f(-\omega t + 2\pi) \\
&= -f(-\omega t + 2\pi - \pi) \\
&= -f(-\omega t + \pi) \\
&= -f(\omega t)
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

respectivement par les propriétés (1.3), (1.2) et (1.12) de f.

On conclut donc par théorème (cours page 3-2) que les a_n sont nuls.

FIG. **1.1** – Reconstruction d'une forme d'onde quelconque, vérifiant les deux premières propriétés, à partir de ses coefficients de Fourier (a_{2p+1} et b_{2p+1}).



Sachant que par symétrie on a

$$\alpha_k = \pi - \alpha_{2M+1-k} \ \forall k \in \{M+1, \cdots, 2M\}$$

Exprimer les coefficients de Fourier $(b_{2p+1})_{p\in N}$ en fonction des angles de commutation $(\alpha_k)_{k\in\{1,\cdots,M\}}$

On a

$$\begin{aligned} b_{2p+1} &= \frac{4}{\pi(2p+1)}\left(1+\sum_{k=1}^{2M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k\right) && (1.14)\\ &= \frac{4}{\pi(2p+1)}\left(1+\sum_{k=1}^{M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k + \underbrace{\sum_{k=M+1}^{2M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k}_{\Lambda}\right) \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à Λ

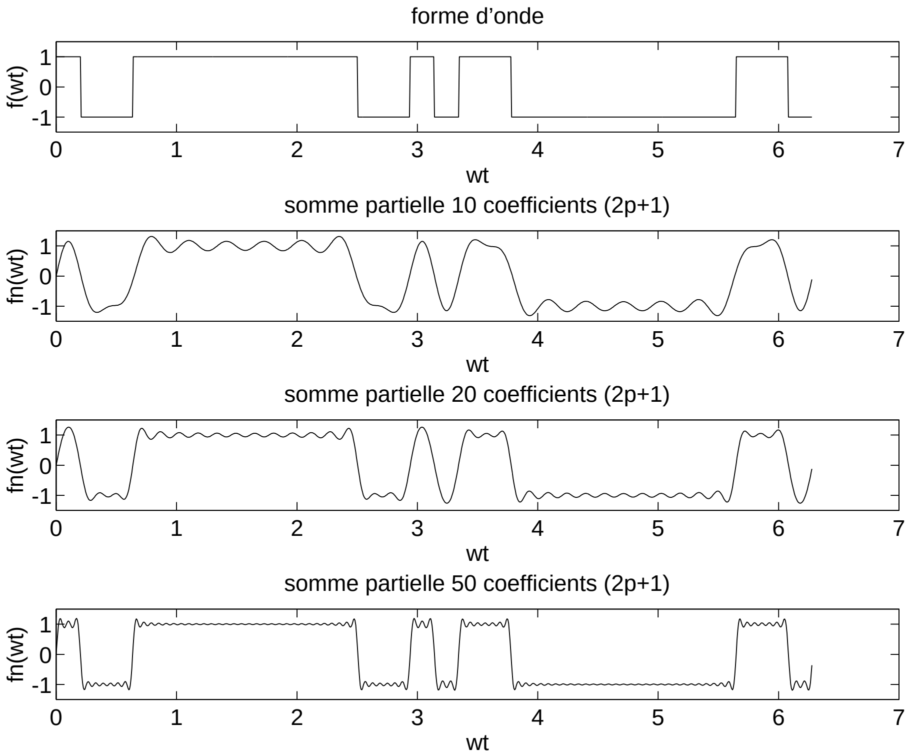
$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{k=M+1}^{2M}(-1)^k\cos(2p+1)(\pi-\alpha_{2M+1-k}) && (1.15)\\ &= \sum_{k=1}^{M}(-1)^{k+1}\cos(2p+1)(\pi-\alpha_k)\\ &= -\sum_{k=1}^{M}(-1)^{k+1}\cos(2p+1)\alpha_k\\ &= \sum_{k=1}^{M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k \end{aligned}$$

d'où

$$b_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}\left(1+2\sum_{k=1}^{M}(-1)^k\cos(2p+1)\alpha_k\right) \qquad (1.16)$$

La figure 1.2 représente la reconstruction d'une forme d'onde quelconque, vérifiant les propriétés (1.2), (1.3) et (1.12), à partir de ses coefficients de Fourier (b_{2p+1}).

FIG. **1.2** – Reconstruction d'une forme d'onde vérifiant les deux premières propriétés et celle de symétrie, à partir de ses coefficients de Fourier (b_{2p+1}).



Chapitre 2

Elimination d'harmoniques

On cherche à créer une forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rang n_1, n_2, ..., n_M en choisissant de façon adéquate les angles de commutation. Pour ce faire il faut résoudre les M équation non-linéaire à M inconnues suivantes

$$\begin{cases} b_{n_1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_M) = 0 \\ \vdots \\ b_{n_M}(\alpha_1, \cdots, \alpha_M) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

On remarquera que du fait des propriétés de symétrie, les angles de commutation doivent satisfaire

$$\alpha_k \in [0, \frac{\pi}{2}[\ \forall k \in \{1, \cdots, M\} \tag{2.2}$$

2.1 Elimination de l'harmonique de rang 5

Résolution « manuelle »

Dans la mesure où l'on a un seul harmonique à éliminer le système à résoudre se réduit à

$$b_5(\alpha_1) = 0 \tag{2.3}$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{4}{5\pi}(1 - 2\cos 5\alpha_1) &= 0 \qquad (2.4) \\ \cos 5\alpha_1 &= \frac{1}{2} \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{15} \end{aligned}$$

Résolution à l'aide de `matlab`

La méthode de Newton est initiliasée avec

$$\alpha^{(0)} = \frac{\pi}{8} \tag{2.5}$$

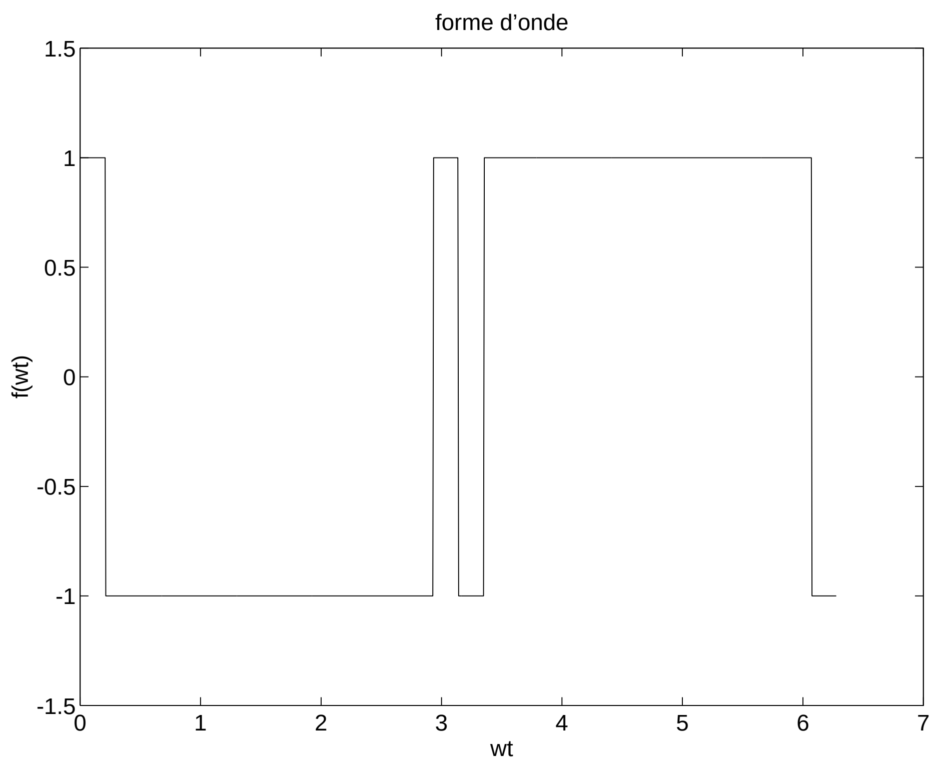
et donne

$$\alpha_1 = 0.2094 \approx \frac{\pi}{15} \tag{2.6}$$

ce qui correspond à la solution trouvée précédemment.

Le tableau 2.1 présente les dix premiers coefficients de Fourier de cette forme d'onde. La figure 2.1 représente la forme d'onde ne contenant pas l'harmonique de rang 5 correspondant aux α_i précédents.

FIG. **2.1** – Forme d'onde ne contenant pas l'harmonique de rang 5.



h	b_1	b_3	b_5	b_7	b_9	b_{11}	b_{13}	b_{15}	b_{17}	b_{19}
5	-1.21	-0.26	0.00	0.14	0.22	0.27	0.27	0.25	0.21	0.15
5 et 7	1.18	0.20	0.00	0.00	0.10	0.24	0.32	0.30	0.20	0.05
5,7 et 11	-1.17	-0.19	0.00	0.00	-0.03	0.00	0.12	0.27	0.34	0.29

TAB. 2.1 – Coefficients de Fourier (10 premiers b_{2p+1}) des formes d'ondes ne contenant pas certains harmoniques.

2.2 Elimination des harmoniques de rangs 5 et 7

On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} b_5(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \\ b_7(\alpha_1, \alpha_2) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

par la méthode de Newton.

La méthode de Newton est initiliasée avec

$$\alpha^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{8} \\ \frac{\pi}{8} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

et donne

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.2836 \\ \alpha_2 &= 0.3852 \end{aligned} \tag{2.9}$$

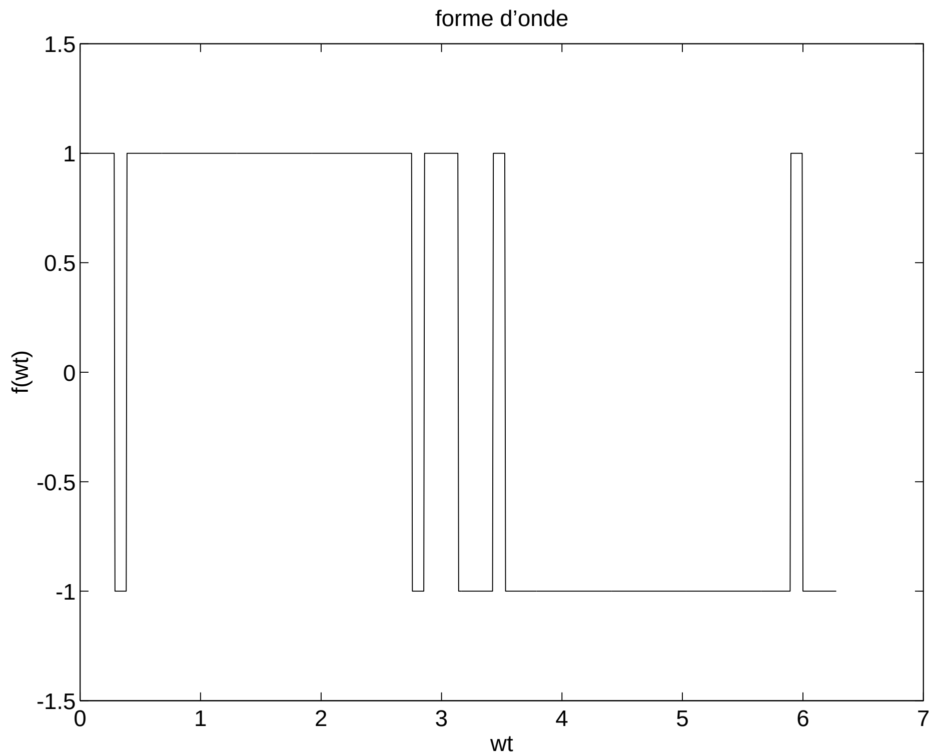
Le tableau 2.1 présente les dix premiers coefficients de Fourier de cette forme d'onde. La figure 2.2 représente la forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rangs 5 et 7 correspondant aux α_i précédents.

2.3 Elimination des harmoniques de rangs 5, 7 et 11

On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} b_5(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \\ b_7(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \\ b_{11}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

FIG. 2.2 – Forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rangs 5 et 7.



par la méthode de Newton.

La méthode de Newton est initiliasée avec

$$\alpha^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{14} \\ \frac{\pi}{14} \\ \frac{\pi}{14} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

et donne

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0.1526 \\ \alpha_2 &= 0.4258 \\ \alpha_3 &= 0.4845 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Le tableau 2.1 présente les dix premiers coefficients de Fourier de cette forme d'onde. La figure 2.3 représente la forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rangs 5, 7 et 11 correspondant aux α_i précédents.

2.4 Sommes partielles

On s'intéresse maintenant aux sommes partielles

$$f_N(\omega t) = \sum_{p=0}^{N} b_{2p+1} \sin(2p+1)\omega t, \ \ \omega t \in [0, 2\pi[\tag{2.13}$$

des trois formes d'ondes précécentes, ainsi qu'à l'erreur

$$|(f - f_N)(\omega t)| \tag{2.14}$$

Les figures 2.4, 2.5, 2.6 représentent (2.13) et (2.14) pour les formes d'ondes ne contenant pas respectivement, l'harmonique de rang 5, ceux de rangs 5 et 7 et ceux de rangs 5, 7 et 11.

Fig. **2.3** – Forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rangs 5, 7 et 11.

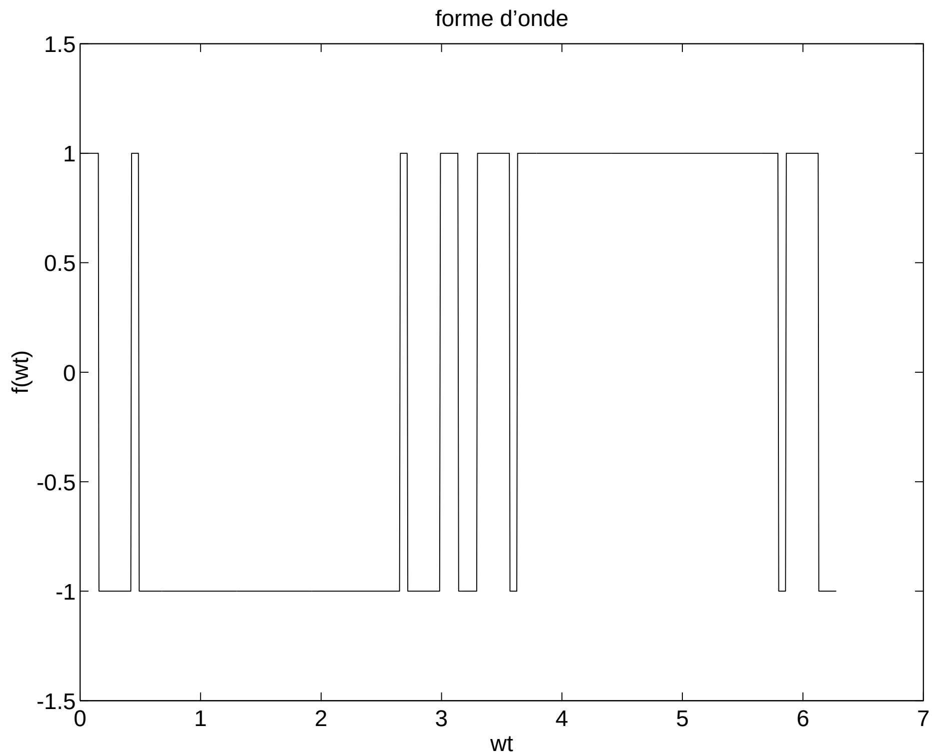


FIG. 2.4 – Sommes partielles pour la forme d'onde ne contenant pas l'harmonique de rang 5.

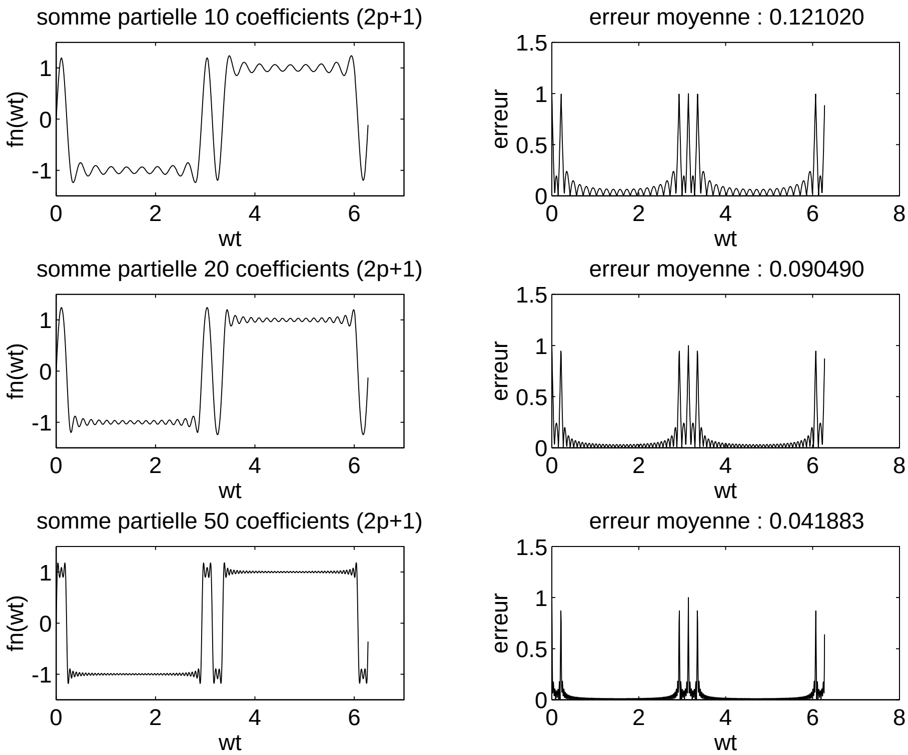


FIG. 2.5 – Sommes partielles pour la forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rangs 5 et 7.

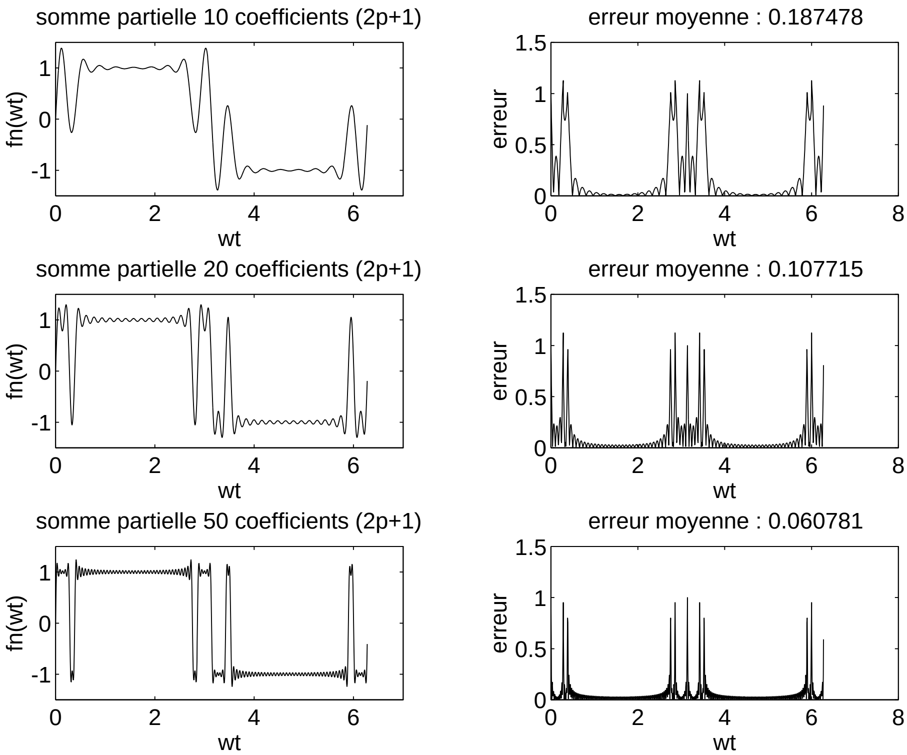
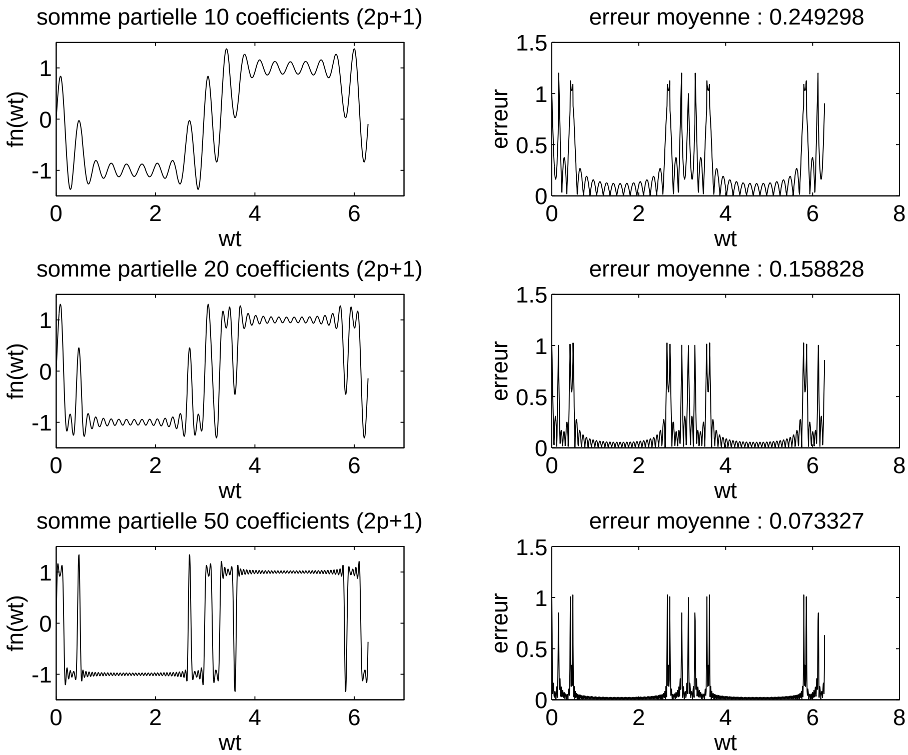


FIG. **2.6** – Sommes partielles pour la forme d'onde ne contenant pas les harmoniques de rangs 5, 7 et 11.



Conclusion

A propos de la suppression d'harmoniques

Le problème de la méthode de suppression d'harmoniques réside dans le fait que l'on ne peut prévoir si la méthode de Newton va converger et surtout vers quelle solution. Dans le cadre de ce travail, on recherche des $\alpha_{i=1,\cdots,M}$ tels qu'ils soient tous classés par ordre croissant, positifs et strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Or rien ne nous garantit qu'à partir d'un $\alpha^{(0)}$ donné la méthode de Newton va converger vers une solution de ce type. Il est donc nécessaire de procéder par tatonnement jusqu'à l'obtention d'une solution raisonnable respectant les critères précédents.

A propos des sommes partielles

Dans un premier temps, on remarque que l'erreur moyenne[1]

$$\bar{\Sigma} = \int_0^{2\pi} |f(\omega t) - f_N(\omega t)| d\omega t \tag{2.15}$$

est une fonction décroissante du nombre de coefficients $2p+1$ considérés, ce qui est tout à fait normal puisque

$$\lim_{N \to +\infty} f_N(\omega t) = f(\omega t) \tag{2.16}$$

Dans un second temps, on remarque que la fonction f_N est perturbée par un effet de Gibbs qui résulte de la troncature des coefficients de Fourier. En effet, cette troncature revient à effectuer une multiplication de la série de Fourier par une fenêtre rectangulaire et donc à convoluer f avec un sinus cardinal. Plus la fenêtre est large (plus on considère de coefficients) moins les lobes secondaires du sinus cardinal sont importants (ce dernier tend vers une impulsion de Dirac,

[1]. Les valeurs données sur les figures 2.4, 2.5 et 2.6 ne sont que des approximations de l'erreur moyenne puisque calculées sur des fonctions échantillonnées.

élément neutre de la convolution, lorsque $N \to +\infty$) et plus l'effet de Gibbs est faible.

De la même façon, l'erreur $|(f-f_N)(\omega t)|$ tend vers 0 presque partout, sauf aux points de discontinuité de la forme d'onde. En effet, il est nécessaire de prendre en compte un nombre infini d'harmoniques pour modéliser ces discontinuités. Cependant, le fait qu'il reste quelques points isolés n'influe pas sur l'erreur moyenne dont la limite est 0 quand $N \to +\infty$.

Annexe A

Mise en oeuvre à l'aide de matlab

A.1 Représentation et calcul d'une forme d'onde

```
% alpha : vecteur des angles de commutations
% n     : nombre de points desires entre 0 et 2pi
function [smp,wti]=fonde(alpha,n)

smp = zeros(n,1);
wti = zeros(n,1);

stp = 2 * pi / n;

for k=1:n
    wt = (k-1) * stp;
    wti(k) = wt;
    if wt < pi
% trouve le plus petit angle de commutation
        i = find(alpha>wt);
        smp(k) = (-1)^(i(1)-2); % -2 : alpha commence a 0
    else
        wt = wt - pi;
        i = find(alpha>wt);
        smp(k) = -(-1)^(i(1)-2); % -2 : alpha commence a 0
    end;
end;

% affichage
plot(wti,smp);
```

```
xlabel(´wt´);
ylabel(´f(wt)´);
title(´forme d´´onde´);
axis([0 fix(2*pi)+1 -1.5 1.5]);
```

A.2 Fonction utilisée par fsolve

```
% alpha : vecteur des angles de commutations
function [b]=fourcoef(alpha)

% variable globale pour les rangs des harmoniques
global HarmonicsToSuppress

M = length(alpha);

b = zeros(size(alpha));

for i=1:M
% 2p+1
    h=HarmonicsToSuppress(i);
    for j=1:M
        b(i) = b(i) + (-1)^j * cos(h*alpha(j));
    end;
% il n´est pas necessaire de multiplier par 4/(pi*h)
    b(i) = 1 + 2 * b(i);
end;
```

A.3 Suppression d'harmoniques

```
% r      : vecteur des rangs
% alpha0 : initialisation de la methode de Newton
function alpha=fsupharm(r,alpha0)

% controle de l´imparite des rangs
for i=1:length(r)
    if rem(r(i)-1,2)~=0
        disp(´only odd harmonics are allowed´);
        return;
```

```
    end;
end;

% creation de la variable global des rangs
global HarmonicsToSuppress
HarmonicsToSuppress = r;

o = zeros(18,1);
o(1) = 0;
o(2) = 1e-8;
o(3) = 1e-8;

% calcul du vecteur solution par ´fsolve´
buf = fsolve(´fourcoef´,alpha0,o);

clear global HarmonicsToSuppress

% creation du vecteur des angles de commutation
alpha = zeros(2*length(r)+2,1);
alpha(2:length(r)+1)=buf;
alpha(length(r)+2:length(alpha))
    = pi - flipud(alpha(1:length(r)+1));
```

A.4 Somme partielle d'une forme d'onde symétrique

Afin de créer la figure 1.1 nous avons aussi écrit une fonction calculant la somme partielle d'une forme d'onde n'ayant pas la propriété de symétrie. Cette fonction n'est pas présente dans ce rapport mais ressemble beaucoup à celle présentée ci-après (mis à par qu'il est nécessaire de prendre en compte les a_{2p+1} qui sont non tous nuls).

```
% alpha : vecteur des angles de commutation
% n     : nombre de coefficients 2p+1 a considerer
% nn    : nombre de points du trace (entre 0 et 2pi)
function [b,smp,wti]=fserie2(alpha,n,nn)

M = fix(length(alpha)/2) - 1;
```

```
% calcul des coefficients de Fourier
b = zeros(n,1);

for p=0:n-1
    for k=1:M
        b(p+1) = b(p+1) + (-1)^k * cos((2*p+1)*alpha(k+1));
    end;
    b(p+1) = (4/(pi*(2*p+1))) * (1 + 2 * b(p+1));
end;

% approximation
smp = zeros(nn,1);
wti  = zeros(nn,1);
stp  = 2 * pi / nn;

for k=1:nn
    wt = (k-1) * stp;
    wti(k) = wt;
    for p=0:n-1
        smp(k) = smp(k) + b(p+1) * sin((2*p+1)*wt); % b(2p+1)
    end;
end;

% affichage
plot(wti,smp);
xlabel('wt');
ylabel('fn(wt)');
title(sprintf('somme partielle %d coefficients (2p+1)',n));
axis([0 fix(2*pi)+1 -1.5 1.5]);
```